数理解析研究所講究録
901巻 1995年 24-29

Sequential order of product spaces

愛媛大学理学部　野倉　嗣紀 (Tsugunori Nogura)

位相空間Xに対し，sequential order so(X) が次のように定義される。

$$so(X) = \min\{\alpha \in \omega_1 + 1 : \overline{A} = [A]_\alpha \text{ for every } A \subset X\}$$

ここで $\overline{A}$ は集合Aの閉包，$[A]_\alpha$ は次のように帰納的に定義される。$[A]_0 = A$, $[A]_1 = \{x \in X :$ Aの点列でxに収束するものがある。$\}$ $[A]_{\alpha+1} = [[A]_\alpha]_1$, αが極限順序数のときは $[A]_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} [A]_\beta$。

次の van Douwen - Tanaka [2], [5] の定理が示すように，sequential 空間の積は sequential にはなり難いことがわかる。

<u>Theorem</u> (van Douwen - Tanaka). S_ω を sequential fan とする。$S_\omega \times X$ が sequential になる必要十分条件は X が locally countably compact sequential なことである。

$so(X)$は次のようにすれば、一般の位相空間Xに対しても、定義される. $S[X]$ でXに次のような新しい位相を導入したものを表すことにする: $A \subset X$ が $S[X]$で閉集合とは、Xの任意の compact metric subset Kに対し $A \cap K$が Kで閉集合。
このとき新しい位相 $S[X]$ は sequential になる。そこで
$$so(X) = so(S[X])$$
で定義する。

この小論では sequential space (又は特別な場合として Fréchet space) X, Yに対し $so(X)$, $so(Y)$ と $so(X \times Y)$の関係を検べる。特に $so(X \times Y) \leq so(X) + so(Y)$が成立するとき product theorem が成立する。という。

§1. sequential order に関する product theorem

<u>Theorem 1.1.</u> Xが sequential space, Yは regular locally countably compact sequential space. そのとき $X \times Y$ は sequential になり更に product theorem が成立する.

Xが sequential, Yが第一可算空間としても $X \times Y$ が sequential とは限らないが 次の product theorem が成立する。

<u>Theorem 1.2.</u> X が sequential space, Y が第一可算空間とする. そのとき $so(S[X\times Y]) \leq so(X)+1$.

X の部分集合の collection $\mathcal{P}$ が k-network とは X の compact 部分集合 K と開集合 $U \supset K$ に対し $\mathcal{P}$ の有限部分集合 $\mathcal{P}_K$ で $K \subset \cup\mathcal{P}_K \subset U$ となるものがとれる。

<u>Theorem 1.3.</u> X, Y を point-countable k-network を持つ Fréchet 空間とする。そのとき $X\times Y$ は sequential ならば product theorem が成立する. つまり $so(X\times Y) \leq 2$.

上の定理で $X\times Y$ が sequential であるという仮定の代わりに $so(S[X\times Y]) \leq 2$ が成立することが望ましいが、次のような example を構成できる.

<u>Example 1.4</u> point-countable k-network を持つ Fréchet 空間 X, Y で $so(S[X\times Y]) = 3$ となるものがある。

§2. Fréchet 空間 X と Y で $so(X \times Y) = \alpha$ となる例

<u>Lemma 2.1 (CH)</u> X を可算 k_ω-space とする。X にもとの位相より弱い位相 τ_1 と τ_2 が導入され

(1) X は $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ に closed に埋め込める。

(2) $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ は sequential

とできる。

この Lemma より Fréchet 空間 X, Y で $X \times Y$ は sequential $so(X \times Y) \geq \alpha$. となるものが構成できる。特に Fréchet space X, Y で $so(X \times Y) = \omega_1$ となるものの存在が保障される。

位相空間 X が scattered とは任意の空でない閉部分集合が孤立点をもつものとする。$X^0 = X \setminus \{X$ の isolated points$\}$ $X^{\alpha+1} = X^\alpha \setminus \{X^\alpha$ の isolated points$\}$, $X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta$ と定義する。X が scattered ならば或る順序数 α で $X^\alpha = \phi$ となる。$Cd(X) = \min\{\alpha : X^\alpha = \phi\}$ と定め Cantor degree とよぶことにする。

<u>Lemma 2.2.</u> X を sequential scattered とする。そのとき

$$so(X) \leq Cd(X).$$

Lemma. 2.3. 任意の順序数 $\alpha \leq \omega_1$ に対し Arhangelskii-Franklin space [1] X_α で $Cd(X_\alpha) = so(X_\alpha)$ となるものが存在する。

Lemma 2.4. $f: X \to Y$ を 1:1, 連続 上への写像とする. 今, Y が scattered とすると, $Cd(X) \leq Cd(Y)$ が成立。

Lemma. 2.5. (CH) X を可算 k_ω-space. $Y = (X, \tau_1)$, $Z = (X, \tau_2)$, τ_1, τ_2 は Lemma. 2.1. で存在が保障された位相とする。そのとき適当に構成すれば次の (*) をみたすようにできる。

(*).

任意の $A \subset Y \times Z$, $x \in Y \times Z$ で $x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$ かつ $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ ここで $\gamma < \beta$ とする. そのとき $B \subset Y \times Z$ で $x \in [B \cap A]_\beta^{B}$ かつ $\pi_Y|B$ 又は $\pi_Z|B$ が 1:1.

$x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$ で $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ $\gamma < \beta$ とする。そのとき $B \subset Y \times Z$ で上の条件をみたすものとする. 今 $\pi_Y|B$ が 1:1 とすれば $\beta \leq Cd(B) \leq Cd(Y) = \alpha$ となり, $so(Y \times Z) \leq \alpha$ が成立する. Lemma. 2.1 と合せれば次の定理を得る。

Theorem 2.6 (CH). 任意の順序数 $\alpha \le \omega_1$ に対し Fréchet 空間 Y, Z で $so(Y \times Z) = \alpha$ となるものが存在する。

References.

[1]. A.V. Arhangel'skii - S.P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces, Michigan Math. J. 15 (1968) 313-320.

[2] E.K. van Douwen, The product of a Fréchet spaces and a metrizable spaces, Topology and Appl. 47 (1992) 163-164.

[3]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces., Topology and Appl. (to appear)

[4]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces II, (in preparation).

[5] Y. Tanaka, Products of sequential spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976) 371-375.